الاسم:

الدرجة 100

المدة ساعة ونصف

وزارة التعليم العالي

جامعة البعث

كلية العلوم

الامتحان النهائي

مقرر تحليل (2) - السنة الأولى رياضيات

الفصل الثاني لعام 2015 - 2016

---

أجب عن الأسئلة التالية:

**السؤال الأول (38 درجة):** (1) باستخدام طريقة التكاملة بالتجزئة أوجد القانون التدريجي المطلوب لحساب التكامل:

$$I_n = \int \cos^n x \, dx \quad , n = 1,2,3,4, \ldots$$

ثم استنتج التكامل:

$$I_4 = \int \cos^4 x \, dx$$

(2) أوجد التكامل الآتي:

$$I = \int \left[ \frac{1}{x(2+\ln^2 x)} + \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}} \right] dx$$

(3) مستخدماً تحويلات أولر أوجد التكامل الآتي:

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}$$

---

**السؤال الثاني (36 درجة):** (أ) احسب التكاملين الآتيين:

$$K = \int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\, dx \quad , \quad M = \int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$$

(ب) ادرس تقارب أو تباعد التكاملين المعتلين الآتيين:

$$I_1 = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^{-x})} \quad , \quad I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$$

---

**السؤال الثالث (26 درجة):** (أ) أوجد طول المنحني المغلق المعطى بالمعادلة:

$$r = a(1+\cos\theta) \quad , \quad a>0 \, , \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

(ب) أوجد مساحة المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنيين:

$$y_1 = -x \quad , \quad y_2 = 2 - x^2$$

---

انتهت الأسئلة

حمص في 12/6/2016 مع أطيب الأمنيات بالتوفيق والنجاح

أستاذ المقرر

د. منير مخلوف

طرق تكامل + السنة الثانية

كلية العلوم — قسم الرياضيات — الفصل الثاني لعام $\frac{2015}{2016}$ — الدرجة: ....

حل السؤال الأول: (1) إذا كانت n عدد طبيعي ...

$I_n = \int \cos^n x\,dx = \int \cos^{n-1}x \cdot \cos x\,dx$ بالتجزئة

نفرض أن: $u = \cos^{n-1}x \Rightarrow du = -(n-1)\cos^{n-2}x \sin x\,dx$

$dv = \cos x\,dx \Rightarrow v = \sin x$

ومنه:

$I_n = \sin x \cos^{n-1}x + (n-1)\int \cos^{n-2}x\,dx - (n-1)\int \cos^n x\,dx$

10

$I_n = \sin x \cos^{n-1}x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$

بالتبسيط:

$I_n(1+(n-1)) = \sin x \cos^{n-1}x + (n-1)I_{n-2}$

أي:

$I_n = \frac{\sin x \cos^{n-1}x}{n} + \frac{n-1}{n}I_{n-2}$ ; $n=0,1,2,\ldots$

التكامل بالنسبة للتكامل:

$I_4 = \int \cos^4 x\,dx$

لدينا: $n=4$ لنا يكون

$I_4 = \frac{\sin x \cos^3 x}{4} + \frac{3}{4}I_2$

ولكن:

$I_2 = \frac{\sin x \cos x}{2} + \frac{1}{2}I_0$ ; $I_0 = \int dx = x + c$

6

خلاصة:

$I_4 = \frac{\sin x \cos^3 x}{4} + \frac{3}{8}\sin x \cos x + \frac{3}{8}x + c$

(2) ليكن التكامل I لدينا:

$I = \int \frac{dx}{x(2+\ln^2 x)} + \int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}\,dx = I_1 + I_2$

بالنسبة للتكامل $I_1$ نلاحظ أن:

نفرض $\ln x = t$ ومنه $dt = \frac{dx}{x}$

بالتعويض نحصل على:

$I_1 = \int \frac{dt}{2+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}} + c = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\ln x}{\sqrt{2}} + c_2$

(2)

$\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{2}$ [illegible]

حساب التكامل $I_2$: نلاحظ أن المضاعف المشترك للمقامات هو (12) لذلك نفرض أن:

$x = t^{12} \Rightarrow dx = 12t^{11}dt$

$\sqrt[4]{x} = t^3$ ، $\sqrt{x} = t^6$ ، $\sqrt[3]{x} = t^4$

6

$I_2 = \int \frac{t^6+t^4}{t^3}(12t^{11})dt = 12\int t^{14}dt + 12\int t^{12}dt$

$= \frac{4}{5}t^{15} + \frac{12}{13}t^{13} + c = \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} + \frac{12}{13}x^{\frac{13}{12}} + c_1$

ملاحظة: يمكن أيضاً حساب هذا التكامل باستخدام تكامل ثنائي الحد حيث أن: $n=\frac{1}{6}$ ; $m=\frac{1}{4}$ ; $p=1$ ، $n=12$

وبالتالي يمكن أن نفرض: $x = t^n = t^{12}$

ومنه يكون:

$I = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\ln x}{\sqrt{2}} + \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} + \frac{12}{13}x^{\frac{13}{12}} + c$

(3) حساب التكامل:

$J = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}$

نلاحظ أن: $a = 1 > 0$ ، $\Delta = 25 > 0$ [illegible]

ومنه يوجد لدينا جذران هما: $x_1 = -4$ ، $x_2 = 1$ وبالتالي نفرض أن:

$\sqrt{x^2+3x-4} = \sqrt{(x+4)(x-1)} = t(x+4)$

ومنه نجد:

$t = \sqrt{\frac{x-1}{x+4}}$ ; $dx = \frac{10t}{(1-t^2)^2}dt$ ; $x = \frac{4t^2+1}{1-t^2}$

وبالتعويض نحصل على:

10

$J = \int \frac{\frac{10t}{(1-t^2)^2}dt}{\frac{4t^2+1}{1-t^2}+4} = 2\int\frac{dt}{1-t^2} = \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + c$

$\Rightarrow J = \ln\left|\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}}\right| + c$

- بالنسبة للتكامل H نفرض أن:

$u = \sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \Rightarrow 2du = \frac{dx}{\sqrt{x}}$

8 عندما $x = \frac{\pi^2}{4}$ يكون $u = \frac{\pi}{2}$

عندما $x = \pi^2$ يكون $u = \pi$

بالتعويض نجد أن:

$$H = 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin u \, du = -2[\cos u]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 2$$

وبالنسبة للتكامل K نفرض أن:

$x = a\sin\theta \Rightarrow dx = a\cos\theta \, d\theta$

عندما $x = 0$ يكون $\theta = 0$

عندما $x = a$ يكون $\theta = \frac{\pi}{2}$

بالتعويض نجد أن:

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2\theta \sqrt{a^2 - a^2\sin^2\theta} \, a\cos\theta \, d\theta = \frac{a^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2\theta)\, d\theta$$

12

$$= \frac{a^2}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4\theta)\, d\theta = \frac{a^2}{8}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - \frac{a^2}{32}[\sin 4\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$K = \frac{\pi a^2}{16} - 0 = \frac{\pi a^2}{16}$$

ب) لدراسة تقارب أو تباعد التكامل المعتل $I_1$ نستخدم اختبار المقارنة:

إذا $x \geq 1$ يكون لدينا:

8 $x^2(1 + e^{-x}) > x^2 \Rightarrow \frac{1}{x^2(1+e^{-x})} < \frac{1}{x^2} \quad ; \forall x \geq 1$

ولكن:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to \infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = 1$$

فهو متقارب

وبالتالي حسب اختبار المقارنة يكون التكامل المعطى متقارب

فيما يخص التكامل $I_2$ نلاحظ أنه توجد نقطة شاذة للدالة المكاملة هي $x = 1$ ولهذا فإن:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{t \to 1^-} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{t \to 1^-}\left[(t-1)^{\frac{2}{3}} - (-1)^{\frac{2}{3}}\right] = -\frac{3}{2}$$